κεφάλαιο 2

ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ

ΣΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ ΠΟΥ ΑΚΟΛΟΥΘΟΥΝ ΘΑ ΑΣΧΟΛΗΘΟΥΜΕ με την αξιολόγηση διάφορων επενδυτικών προτάσεων. Πριν από την ανάλυση των προτάσεων αυτών, είναι απαραίτητο να έχετε κατανοήσει ότι το χρήμα έχει διαχρονική αξία. Αυτό γίνεται αντιληπτό εάν σκεφθείτε ότι ένα ευρώ που δίνετε σήμερα αξίζει περισσότερο από ένα ευρώ το οποίο θα λάβετε σ’ έναν χρόνο από σήμερα. Η ιδέα αυτή είναι συνδεδεμένη με την έννοια του τόκου και αυτού που οι οικονομολόγοι ονομάζουν κόστος ευκαιρίας του χρήματος[1].

Γενικά, πάντως, για να συγκρίνετε δύο ή περισσότερα επενδυτικά σχέδια, θα πρέπει να συγκρίνετε τις εισπράξεις και τις πληρωμές των σχεδίων αυτών, οι οποίες όμως μπορεί να πραγματοποιούνται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να «μεταφέρετε» τις εισπράξεις και τις πληρωμές τους σε μια ενιαία

1. Το κόστος ευκαιρίας του χρήματος (opportunity cost of money) είναι η απόδοση της καλύτερης εναλλακτικής επένδυσης η οποία είναι διαθέσιμη. Με άλλα λόγια, είναι η υψηλότερη απόδοση την οποία μπορεί να επιτύχει ένας επενδυτής εάν δεν επενδύσει τα χρήματά του σ’ ένα συγκεκριμένο πρόγραμμα.

χρονική στιγμή, έτσι ώστε να είναι συγκρίσιμες. Η ενέργεια αυτή μπορεί να γίνει μόνο με την χρησιμοποίηση των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών.

Το κεφάλαιο αυτό περιλαμβάνει τρεις ενότητες. Στη πρώτη ενότητα αναλύεται ο απλός τόκος. Στη δεύτερη ενότητα εξετάζεται ο σύνθετος τόκος και ειδικότερα η τελική αξία και η παρούσα αξία. Στην τρίτη ενότητα παρουσιάζονται οι σειρές πληρωμών (ράντες), καθώς επίσης και ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να βρούμε την σταθερή πληρωμή και το επιτόκιο ανατοκισμού μιας σειράς πληρωμών (ράντας).

2.1 ΑΠΛΟΣ ΤΟΚΟΣ

Το ποσό χρημάτων που δανείζεται κάποιος κατά την σύναψη ενός δανείου ονομάζεται **αρχικό κεφάλαιο** (principal). Το ποσό που λαμβάνει ο δανειζόμενος ονομάζεται **παρούσα αξία** (present value) του δανείου. Στον απλό τόκο το αρχικό κεφάλαιο είναι ίσο με τη παρούσα αξία του δανείου. Ο **χρόνος** (time or term) του δανείου είναι η περίοδος κατά την διάρκεια της οποίας ο δανειζόμενος έχει τη χρήση όλου ή μέρους του δανειζόμενου ποσού. Στα δάνεια απλού τόκου, ο **τόκος** (interest) υπολογίζεται καθ’ ολοκληρίαν επί του αρχικού κεφαλαίου. Στα δάνεια ανατοκιζόμενου τόκου, ο τόκος βασίζεται στο αρχικό κεφάλαιο, το οποίο όμως αυξάνεται κάθε φορά που παράγεται ο τόκος. Η τιμή ενός δανείου απλού τόκου εκφράζεται ως ένα **επιτόκιο** (rate of interest) και είναι ένα σταθερό κλάσμα του κεφαλαίου το οποίο πρέπει να πληρωθεί για τη χρήση του δανείου. Το απλό επιτόκιο παρουσιάζεται συνήθως ως ένα ποσοστό ανά μονάδα χρόνου (για παράδειγμα, 10% το χρόνο).

Η ενσωμάτωση του τόκου στο κεφάλαιο από το οποίο προέκυψε ονομάζεται κεφαλαιοποίηση. **Απλός τόκος** (simple interest) ή απλή κεφαλαιοποίηση ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία ο τόκος που παράγεται ενσωματώνεται στο κεφάλαιο μόνο μια φορά, στο τέλος του χρονικού διαστήματος κατά το οποίο το κεφάλαιο αυτό είναι παραγωγικό. Ο απλός τόκος δίνεται από τη σχέση:

$$I = P \times r \times t \quad \text{(2.1)}$$

όπου I = ο απλός τόκος, P = το αρχικό κεφάλαιο, r = το επιτόκιο και t = ο χρόνος.

Παράδειγμα 2.1

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 ευρώ, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 2 έτη.

Απάντηση: Ο τόκος ανέρχεται σε $I = (100.000 \times 0,12 \times 2 =)$ 24.000 ευρώ.

Όταν το επιτόκιο εκφράζεται σε ετήσια βάση και ο χρόνος του δανείου σε μήνες, τότε είναι απαραίτητη η μετατροπή των μηνών σε κλάσμα του έτους, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί ο προηγούμενος τύπος. Στη περίπτωση αυτή η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$I = P \times r \times (m/12) \qquad (2.2)$$

όπου το m συμβολίζει τον αριθμό των μηνών κατά τους οποίους είναι εκτοκισμένο το κεφάλαιο.

Παράδειγμα 2.2

Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 ευρώ, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 8 μήνες.

Απάντηση: Ο τόκος ανέρχεται σε I = (100.000×0,12×8/12=) 8.000 ευρώ.

Όταν το επιτόκιο εκφράζεται σε ετήσια βάση και ο χρόνος του δανείου σε ημέρες, τότε είναι απαραίτητη η μετατροπή των ημερών σε κλάσμα του έτους, έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί ο προηγούμενος τύπος. Στη περίπτωση αυτή η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$I = P \times r \times (d/360) \text{ ή } I = P \times r \times (d/365) \qquad (2.3)$$

όπου το d συμβολίζει τον αριθμό των ημερών κατά τις οποίες είναι εκτοκισμένο το κεφάλαιο. Όταν ο τόκος έχει υπολογιστεί με διαιρέτη το 360, τότε ονομάζεται **συνηθισμένος τόκος** (ordinary interest). Στη περίπτωση αυτή, λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **εμπορικό έτος**, το οποίο αποτελείται από 12 μήνες που έχουν 30 ημέρες ο καθένας. Όταν ο τόκος έχει υπολογιστεί με διαιρέτη το 365 (ή το 366 για δίσεκτο χρόνο), τότε ονομάζεται **ακριβής τόκος** (exact interest). Στη περίπτωση αυτή, λέμε ότι χρησιμοποιούμε το **πολιτικό έτος**. Η χρησιμοποίηση του 360 ως διαιρέτη οδηγεί στον υπολογισμό μεγαλύτερου τόκου και γι’ αυτό το εμπορικό έτος είναι ιδιαίτερα δημοφιλές μεταξύ των δανειστών.

Παράδειγμα 2.3

Να βρεθεί ο συνηθισμένος και ο ακριβής τόκος κεφαλαίου 100.000 ευρώ, το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 60 ημέρες.

Απάντηση: Ο συνηθισμένος τόκος ανέρχεται σε I = (100.000×0,12×60/360=) 2.000 ευρώ. Ο ακριβής τόκος ανέρχεται σε I = (100.000×0,12×60/365=) 1.972,6 ευρώ.

Για να εφαρμόσουμε τους τύπους που αναφέρονται στο εμπορικό ή στο πολιτικό έτος, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις **τοκοφόρες ημέρες** ενός δανείου, δηλαδή τον αριθμό των ημερών για τις οποίες υπολογίζεται τόκος. Υπάρχουν δύο τρόποι για να υπολογίσει κανείς τον αριθμό των ημερών που μεσολαβούν μεταξύ δύο ημερομηνιών ενός δανείου. Η πιο συνηθισμένη μέθοδος είναι η **ακριβής μέθοδος** (exact), η οποία περιλαμβάνει όλες τις ημέρες εκτός από την πρώτη. Η δεύτερη μέθοδος είναι η **προσεγγιστική μέθοδος** (approximate), η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι όλοι οι μήνες περιλαμβάνουν 30 ημέρες. Στον αριθμό αυτό προστίθεται ο ακριβής αριθμός των ημερών που εναπομένουν μέσα στον μήνα, μέχρι να λήξει το δάνειο.

Παράδειγμα 2.4

Να βρεθεί ο ακριβής και ο κατά προσέγγιση χρόνο ο οποίος μεσολαβεί μεταξύ της 5ης Ιανουαρίου και της 25ης Φεβρουαρίου.

Απάντηση: Ο ακριβής χρόνος είναι 51 ημέρες. Ο αριθμός αυτός βρίσκεται εάν προσθέσουμε στις 26 ημέρες που εναπομένουν μέχρι το τέλος του Ιανουαρίου, τις 25 ημέρες του Φεβρουαρίου. Ο προσεγγιστικός χρόνος είναι 50 ημέρες. Ο αριθμός αυτός βρίσκεται ως εξής. Υπολογίζουμε πρώτα τους μήνες που μεσολαβούν μεταξύ 5 Ιανουαρίου και 5 Φεβρουαρίου. Στη περίπτωση αυτή, μεσολαβεί ένας μήνας που αντιστοιχεί σε 30 ημέρες. Στη συνέχεια προσθέτουμε στις 30 ημέρες που βρήκαμε τις 20 ημέρες που μεσολαβούν μεταξύ 5 Φεβρουαρίου και 25 Φεβρουαρίου. Το σύνολο μας κάνει 50 ημέρες.

Από τη προηγούμενη ανάλυση γίνεται φανερό ότι έχουμε ακριβή και συνηθισμένο τόκο, καθώς επίσης και ακριβή και κατά προσέγγιση χρόνο. Κατά συνέπεια, υπάρχουν τέσσερις τρόποι για να υπολογίσει κανείς τον απλό τόκο ενός δανείου. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος όμως είναι η χρησιμοποίηση συνηθισμένου τόκου και ακριβούς χρόνου. Η συνηθισμένη αυτή εμπορική πρακτική ονομάζεται **κανόνας των τραπεζιτών ή μεικτός κανόνας** (bankers' rule).

Οι υπολογισμοί των τόκων βραχυχρόνιων οικονομικών πράξεων όπου ο χρόνος εκφράζεται σε ημέρες και το επιτόκιο παραμένει σταθερό μπορούν να γίνουν ευκολότερα με τη χρήση τοκαρίθμων. Η προηγούμενη σχέση η οποία μας δίνει τον απλό τόκο μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$I = P \times r \times \left(\frac{d}{360}\right) \quad \Rightarrow \quad I = \frac{P \times d}{\frac{360}{r}} = \frac{N}{D} \qquad (2.4)$$

όπου N είναι το γινόμενο του αρχικού κεφαλαίου (P) επί του αριθμού των ημερών (d) που διαρκεί το δάνειο και ονομάζεται **τοκάριθμος**, δηλαδή N=P×d. Το D, το οποίο ισούται με 360/r (ή 365/r), ονομάζεται **σταθερός διαιρέτης**.

Παράδειγμα 2.5
Να βρεθεί ο τόκος κεφαλαίου 100.000 ευρώ το οποίο τοκίστηκε με ετήσιο επιτόκιο 12% για 45 ημέρες. Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του τοκαρίθμου.
Απάντηση: Ο τοκάριθμος ισούται με N = (100.000×45=) 4.500.000 και ο σταθερός διαιρέτης ισούται με D = (360/0,12=) 3.000. Κατά συνέπεια, ο τόκος ισούται με I = (4.500.000/3.000 =) 1.500 ευρώ.

Το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και του τόκου ονομάζεται **τελική αξία** (amount) του κεφαλαίου, συμβολίζεται με S και δίνεται από τη σχέση:

$$S = P + I$$
$$S = P + (P \times r \times t) \qquad (2.5)$$
$$S = P \times [1 + (r \times t)]$$

Παράδειγμα 2.6
Δανείζεται κάποιος 100.000 ευρώ για 6 μήνες με ετήσιο επιτόκιο 15%. Ποια είναι η τελική αξία την οποία θα πρέπει να καταβάλει σε 6 μήνες;
Απάντηση: Το συνολικό ποσό που θα πρέπει να πληρώσει σε 6 μήνες είναι S = {100.000×[1+(0,15×6/12)]=} 107.500 ευρώ.

Εάν είναι γνωστή η τελική αξία ενός δανείου και θέλουμε να υπολογίσουμε το αρχικό κεφάλαιο (παρούσα αξία), μπορούμε να λύσουμε την προηγούμενη σχέση ως προς P.

$$P = \frac{S}{\left[1 + (r \times t)\right]} \qquad (2.6)$$

Παράδειγμα 2.7
Ποια είναι η παρούσα αξία ενός κεφαλαίου ύψους 108.000 ευρώ το οποίο θα σας δοθεί σε 1 έτος από σήμερα, εάν είναι γνωστό ότι το κόστος του χρήματος είναι 8%;
Απάντηση: Η παρούσα αξία είναι P = {108.000/[1+(0,08×1)]=} 100.000 ευρώ. Κατά συνέπεια, 100.000 ευρώ επενδυμένες σήμερα με ετήσιο επιτόκιο 8% θα παράγουν τελική αξία 108.000 ευρώ σε 1 έτος.

2.2 ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

Ανατοκισμός ή σύνθετος τόκος ή σύνθετη κεφαλαιοποίηση (compound interest) ονομάζεται η διαδικασία κατά την οποία ο τόκος ο οποίος παράγεται κάθε περίοδο (δηλαδή ο δεδουλευμένος τόκος) προστίθεται στο κεφάλαιο (κεφαλαιοποιείται) και το άθροισμά τους αποτελεί παραγωγικό κεφάλαιο για όλες τις επόμενες περιόδους. Άρα, στη σύνθετη κεφαλαιοποίηση δημιουργείται τόκος από την επένδυση του τόκου. Στην απλή κεφαλαιοποίηση ο τόκος και το αρχικό κεφάλαιο παραμένουν αμετάβλητα, ενώ στη σύνθετη κεφαλαιοποίηση ο τόκος και το εκτοκιζόμενο κεφάλαιο αυξάνουν κάθε περίοδο. Ένα κεφάλαιο μπορεί να ανατοκίζεται μια ή και περισσότερες φορές το χρόνο. Άρα, η περίοδος του ανατοκισμού ενός κεφαλαίου μπορεί να είναι το έτος, το εξάμηνο, ο μήνας κλπ. Στη περίπτωση αυτή, ονομάζεται ότι έχουμε ανατοκισμό κάθε έτος, κάθε εξάμηνο, κάθε μήνα κλπ.

2.2.1 ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ

Τελική αξία ή μελλοντική αξία (terminal value or future value) είναι η αξία που θα έχει στο μέλλον ένα χρηματικό ποσό το οποίο επενδύεται σήμερα. Ανάλογα με το πόσες φορές ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται μέσα σ' ένα χρόνο, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Ετήσιος ανατοκισμός (annual compounding). Στο τέλος n ετών η τελική αξία (TV) μιας αρχικής κατάθεσης (X_0) η οποία ανατοκίζεται μια φορά το χρόνο με επιτόκιο r ισούται με:

$$TV_n = X_0 (1+r)^n \qquad \textbf{(2.7)}$$

όπου TV_n = η τελική αξία που θα έχει η επένδυση στο τέλος του n έτους, X_0 = το αρχικό κεφάλαιο το οποίο επενδύθηκε στην αρχή του πρώτου έτους, n = ο αριθμός των ετών κατά την διάρκεια των οποίων γίνεται ο ανατοκισμός, και r = το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού (compound interest rate).

Το διώνυμο $[(1+r)^n]$ λέγεται **συντελεστής ανατοκισμού** (compound factor) ή συντελεστής τελικής αξίας και δίνει τη τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας η οποία ανατοκίζεται με επιτόκιο r για n περιόδους. Ο συντελεστής ανατοκισμού μπορεί να βρεθεί και από ειδικούς πίνακες[2], οι οποίοι δίνουν τη τελική αξία μιας νομισματικής μονάδας που ανατοκίζεται με διάφορα επιτόκια και για διάφορες περιόδους. Οι πίνακες αναγράφουν συνήθως στην πρώτη γραμμή τα διάφορα επιτόκια ανατοκισμού (π.χ. 1%, 2%, 3% κλπ.) και στην πρώτη στήλη τις διάφορες χρονικές περιόδους. Στη διασταύρωση της κάθε στήλης με την κάθε γραμμή υπάρχει ο συντελεστής που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο επιτόκιο της στήλης και στη συγκεκριμένη χρονική

2. Ένας σχετικός πίνακας (Πίνακας 1) υπάρχει στο Προσάρτημα στο τέλος του βιβλίου.

περίοδο της γραμμής. Για παράδειγμα, ο συντελεστής ανατοκισμού που αντιστοιχεί σε επιτόκιο 10% και 5 έτη και αναγράφεται στον πίνακα είναι το 1,6105. Κατά συνέπεια, για να υπολογίσουμε την τελική αξία μιας αρχικής επένδυσης, χρειάζεται μόνο να καθορίσουμε τον συντελεστή ανατοκισμού από τον σχετικό πίνακα και να πολλαπλασιάσουμε τον συντελεστή αυτό με την αρχική επένδυση. Από το διώνυμο $[(1+r)^n]$, αλλά και από τον σχετικό πίνακα, γίνεται φανερό ότι, όταν αυξάνει το r ή το n, ο συντελεστής ανατοκισμού δεν αυξάνει αναλογικά, αλλά αυξάνει κατά γεωμετρική πρόοδο.

Άσκηση 2.1

Έστω ότι καταθέτει κάποιος ένα κεφάλαιο 100.000 ευρώ σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό. Το κεφάλαιο αυτό ανατοκίζεται κάθε χρόνο με ετήσιο επιτόκιο 8%. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στον λογαριασμό στο τέλος του 3ου έτους;

Ανατοκισμός με μεγαλύτερη από την ετήσια συχνότητα. Εάν ο τόκος υπολογίζεται και κεφαλαιοποιείται m περιόδους τον χρόνο, τότε η τελική αξία μιας αρχικής κατάθεσης βρίσκεται από τον τύπο:

$$TV_n = X_0\left[1+\left(\frac{r}{m}\right)\right]^{n\,m} \tag{2.8}$$

όπου TV_n = η τελική αξία που θα έχει η επένδυση στο τέλος του n έτους, X_0 = το αρχικό κεφάλαιο το οποίο επενδύθηκε στην αρχή του πρώτου έτους, n = ο αριθμός των ετών κατά την διάρκεια των οποίων γίνεται ο ανατοκισμός, r = το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού, και m = οι περίοδοι κατά τις οποίες το κεφάλαιο ανατοκίζεται εντός ενός έτους.

Στην περίπτωση που έχουμε ανατοκισμό σε περισσότερες περιόδους από μια τον χρόνο, ο συντελεστής ανατοκισμού μπορεί να βρεθεί από τους πίνακες ως εξής. Βρίσκουμε το επιτόκιο που αντιστοιχεί στην κάθε περίοδο διαιρώντας το ετήσιο επιτόκιο (r) με τον αριθμό των περιόδων (m) ανατοκισμού κατά την διάρκεια ενός έτους. Βρίσκουμε τον αριθμό των περιόδων, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό των ετών (n) κατά τη διάρκεια των οποίων γίνεται ο ανατοκισμός με τον αριθμό των περιόδων (m) ανατοκισμού κατά τη διάρκεια ενός έτους. Στη συνέχεια, βρίσκουμε από τον πίνακα τον συντελεστή που αντιστοιχεί στο επιτόκιο της περιόδου και στον αριθμό των περιόδων που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Παράδειγμα 2.8

Έστω ότι καταθέτει κάποιος ένα κεφάλαιο 100.000 ευρώ σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό. Το κεφάλαιο αυτό ανατοκίζεται δύο φορές το έτος (δηλαδή κάθε 6 μήνες) με ετήσιο επιτόκιο 10%. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στον λογαριασμό στο τέλος του πέμπτου έτους;

Απάντηση: Ο συντελεστής ανατοκισμού ο οποίος αντιστοιχεί σε επιτόκιο (0,10/2=) 0,05 και χρονική περίοδο (5×2=) 10 είναι 1,6289. Άρα, η ζητούμενη τελική αξία είναι TV_3 = (100.000×1,6289=) 162.890 ευρώ.

Άσκηση 2.2

Έστω ότι καταθέτει κάποιος ένα κεφάλαιο 100.000 ευρώ σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό. Το κεφάλαιο αυτό ανατοκίζεται τέσσερις φορές το έτος (δηλαδή κάθε 3 μήνες) με ετήσιο επιτόκιο 8%. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στον λογαριασμό στο τέλος του τρίτου έτους;

Συνεχής ανατοκισμός (continuous compounding). Στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού, η αξία του m τείνει στο άπειρο. Καθώς συμβαίνει αυτό, η αξία του $[1+(r/m)]^{nm}$ προσεγγίζει το e^{rn}, όπου το e είναι η βάση των νεπέρειων ή φυσικών λογαρίθμων (napierian or natural logarithms) και επομένως προσεγγίζει το 2,71828…, δηλαδή

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \qquad (2.9)$$

Επομένως, η τελική αξία μιας αρχικής κατάθεσης (X_0), η οποία ανατοκίζεται συνεχώς με επιτόκιο (r) για (n) χρόνια καθορίζεται από τη σχέση:

$$TV_n = X_0 e^{rn} \qquad (2.10)$$

όπου e » 2,71828.

Στο σημείο αυτό, αξίζει να σημειωθεί ότι, αν και ο συνεχής ανατοκισμός φαίνεται αρκετά περίπλοκος, χρησιμοποιείται συχνά στα χρηματοοικονομικά, διότι επιτρέπει να παράγεται τόκος από τόκο πιο συχνά από οποιαδήποτε άλλη περίοδο ανατοκισμού.

Άσκηση 2.3

Έστω ότι καταθέτει κάποιος ένα κεφάλαιο 100.000 ευρώ σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό. Το κεφάλαιο αυτό ανατοκίζεται συνεχώς με ετήσιο επιτόκιο 8%. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στον λογαριασμό στο τέλος του τρίτου έτους;

2.2.2 ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ

Παρούσα αξία ή προεξοφλημένη αξία ή ανηγμένη αξία (present value or discount value) είναι η αξία που έχει σήμερα ένα συγκεκριμένο ποσό που θα δοθεί σε μια ορισμένη ημερομηνία στο μέλλον[3]. Ο προσδιορισμός της παρούσας αξίας ενός κεφαλαίου είναι το αντίστροφο του ανατοκισμού. Στον ανατοκισμό μετακινούμε ένα ποσό από το παρόν στο μέλλον. Γνωρίζουμε την αξία ενός ποσού σε κάποιο χρονικό σημείο και προσπαθούμε να καθορίσουμε το πόσο αυτό θα αυξηθεί μετά την πάροδο ορισμένου χρόνου εάν ανατοκίζεται με ένα συγκεκριμένο επιτόκιο. Στη παρούσα αξία, μεταφέρουμε ένα μελλοντικό ποσό στο παρόν, δηλαδή προσπαθούμε να καθορίσουμε την σημερινή αξία ενός ποσού του οποίου γνωρίζουμε την μελλοντική αξία. Ενώ στον ανατοκισμό λέγαμε για το επιτόκιο ανατοκισμού και το αρχικό κεφάλαιο, στον καθορισμό της παρούσας αξίας μιλάμε για το προεξοφλητικό επιτόκιο (ή το κόστος ευκαιρίας του χρήματος) και την παρούσα αξία ενός μελλοντικού κεφαλαίου. Κατά τα άλλα, η τεχνική και η ορολογία παραμένουν ίδιες. Μόνο η μαθηματική σχέση αντιστρέφεται, καθώς λύνουμε ως προς X_0. Όπως στον ανατοκισμό, έτσι και στη παρούσα αξία, διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με το πόσες φορές ένα κεφάλαιο ανατοκίζεται μέσα σ' ένα έτος.

Ετήσιος ανατοκισμός. Η παρούσα αξία (PV) κεφαλαίου X_n το οποίο θα πάρουμε μετά από n χρόνια προεξοφλημένο με επιτόκιο k ισούται με

$$PV = X_n \left[\frac{1}{(1+k)^n}\right] \text{®} \quad PV = X_n \left[(1+k)^{-n}\right] \qquad (2.11)$$

όπου PV = η παρούσα αξία που θα έχει μια μελλοντική πληρωμή, X_n = η αξία που θα έχει μια πληρωμή μετά από n χρόνια, n = ο αριθμός των ετών που θα μεσολαβήσουν μέχρι να γίνει η πληρωμή, και k = το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης ή αναγωγής ή κεφαλαιοποίησης (discount rate or capitalization rate).

Το $[1/(1+k)^n]$ ονομάζεται **συντελεστής προεξόφλησης** ή αναγωγής σε παρούσα αξία (discount factor) και δίνει την παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας που λαμβάνεται μετά από n έτη και προεξοφλείται με επιτόκιο k. Ο συντελεστής προε-

3. Η παρούσα αξία μπορεί να καθοριστεί και ως το αρχικό κεφάλαιο το οποίο θα έχει τελική αξία ένα συγκεκριμένο ποσό σε μια ορισμένη μελλοντική ημερομηνία.

ξόφλησης μπορεί να βρεθεί και από ειδικούς πίνακες[4] οι οποίοι δίνουν τη παρούσα αξία μιας νομισματικής μονάδας η οποία προεξοφλείται με διάφορα επιτόκια και για διάφορες περιόδους. Οι πίνακες αναγράφουν συνήθως στη πρώτη γραμμή τα προεξοφλητικά επιτόκια (για παράδειγμα, 1%, 2%, 3% κλπ.) και στη πρώτη στήλη τις χρονικές περιόδους. Γιά παράδειγμα, ο συντελεστής προεξόφλησης που αντιστοιχεί σε επιτόκιο 10% και 5 έτη και αναγράφεται στον πίνακα είναι το 0,6209. Ο συντελεστής αυτός είναι αντίστροφος του συντελεστή ανατοκισμού [0,6209=(1/1,6105)]. Κατά συνέπεια, για να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας επένδυσης, χρειάζεται μόνο να καθορίσουμε τον συντελεστή προεξόφλησης από τον σχετικό πίνακα και να πολλαπλασιάσουμε τον συντελεστή αυτό με τη μελλοντική αξία της επένδυσης. Από το $[1/(1+k)^n]$, αλλά και από τον σχετικό πίνακα, γίνεται φανερό ότι, όταν αυξάνει το k ή το n, ο συντελεστής προεξόφλησης μειώνεται και επομένως μειώνεται και η παρούσα αξία.

Άσκηση 2.4

Ποια είναι η παρούσα αξία 100.000 ευρώ που θα ληφθούν σε 5 έτη από σήμερα, εάν το κόστος του χρήματος είναι 8% και ο ανατοκισμός γίνεται μια φορά τον χρόνο;

Ανατοκισμός με περισσότερες περιόδους τον χρόνο. Εάν ο τόκος υπολογίζεται και κεφαλαιοποιείται m περιόδους τον χρόνο, τότε η παρούσα αξία (PV) κεφαλαίου X_n το οποίο θα πάρουμε μετά από n έτη προεξοφλούμενο με επιτόκιο k ισούται με

$$PV = X_n \left[\frac{1}{\left(1+\frac{k}{m}\right)^{n\,m}} \right] \tag{2.12}$$

όπου PV = η παρούσα αξία που θα έχει μια μελλοντική πληρωμή, X_n = η αξία που θα έχει μια πληρωμή μετά από n έτη, n = ο αριθμός των ετών που θα μεσολαβήσουν μέχρι να γίνει η πληρωμή, k = το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης, και m = οι περίοδοι ανατοκισμού κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Και στην περίπτωση αυτή ο συντελεστής προεξόφλησης μπορεί να βρεθεί από τους πίνακες ως εξής. Διαιρούμε το ετήσιο προεξοφλητικό επιτόκιο (k) με τον αριθμό των περιόδων (m) ανατοκισμού κατά την διάρκεια ενός έτους και πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό των ετών (n) κατά τη διάρκεια των οποίων γίνεται η προεξόφληση, με τις περιόδους (m) ανατοκισμού κατά τη διάρκεια ενός έτους.

4. Ένας σχετικός πίνακας (Πίνακας 2) υπάρχει στο Προσάρτημα στο τέλος του βιβλίου.

Παράδειγμα 2.9

Ποιο είναι το ποσό που θα πρέπει να επενδύσει κανείς σήμερα σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό ο οποίος παρέχει τόκο με ετήσιο επιτόκιο 10% ανατοκιζόμενο 2 φορές τον χρόνο, έτσι ώστε να συγκεντρωθεί σε 5 χρόνια 100.000 ευρώ;
Απάντηση: Ο συντελεστής προεξόφλησης ο οποίος αντιστοιχεί σε επιτόκιο (0,10/2=) 0,05 και χρονική περίοδο (5×2=) 10 είναι 0,6139. Άρα, η ζητούμενη παρούσα αξία είναι PV = (100.000×0,6139=) 61.390 ευρώ.

Άσκηση 2.5

Ποιο είναι το ποσό που θα πρέπει να επενδύσει κανείς σήμερα σ' έναν τραπεζικό λογαριασμό ο οποίος παρέχει τόκο με ετήσιο επιτόκιο 8% ανατοκιζόμενο τέσσερις φορές τον χρόνο, έτσι ώστε να συγκεντρωθεί σε πέντε έτη 100.000 ευρώ;

Συνεχής ανατοκισμός. Στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού, η αξία του m προσεγγίζει το άπειρο. Καθώς συμβαίνει αυτό, η αξία του $\{1/[1+(k/m)]^{nm}\}$ προσεγγίζει το $(1/e^{kn})$, όπου το e είναι η βάση των νεπέρειων ή φυσικών λογαρίθμων και επομένως προσεγγίζει το 2,71828…. Επομένως, η παρούσα αξία κεφαλαίου X_n το οποίο θα πάρουμε μετά από n έτη προεξοφλούμενο με επιτόκιο k καθορίζεται από τη σχέση:

$$PV = X_n \left[\frac{1}{e^{k\,n}} \right] \qquad (2.13)$$

$$\acute{o}\pi o \upsilon \qquad e \approx 2,71828\ldots$$

Άσκηση 2.6

Ποια είναι η παρούσα αξία 100.000 ευρώ που θα ληφθούν σε πέντε έτη από σήμερα, εάν το προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 8% και υπάρχει συνεχής ανατοκισμός;

2.2.3 ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ ΕΠΙΤΟΚΙΟΥ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

Για να βρούμε το επιτόκιο ανατοκισμού όταν γνωρίζουμε την παρούσα (ή την τελική) αξία ενός κεφαλαίου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους αντίστοιχους πίνακες ή τους αντίστοιχους τύπους.

Παράδειγμα 2.10

Ένας επενδυτής δανείζεται σήμερα από μια τράπεζα 1.000.000 ευρώ και συμφωνεί να αποπληρώσει ολόκληρο το δάνειο πληρώνοντας 1.594.000 ευρώ στο τέλος του όγδοου έτους. Ποιο είναι το ετήσιο επιτόκιο με το οποίο δανείζει η τράπεζα τον επενδυτή;

Απάντηση: Το επιτόκιο αυτό βρίσκεται με πολύ απλό τρόπο εάν χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα παρούσας αξίας ή τον πίνακα τελικής αξίας, καθώς τα στοιχεία του ενός πίνακα είναι αντίστροφα των στοιχείων του άλλου.

(α) περίπτωση: πίνακας παρούσας αξίας. Δίνεται ότι η παρούσα αξία είναι PV=1.000.000 και ότι στο όγδοο έτος θα πληρωθεί X_8=1.594.000. Από το τύπο που μας δίνει την παρούσα αξία μιας μελλοντικής πληρωμής έχουμε ότι:

$$PV = X_8 \times (\text{Συντελεστής Παρούσας Αξίας}) \Rightarrow$$
$$1.000.000 = 1.594.000 \times (\text{ΣΠΑ}) \Rightarrow$$
$$\text{ΣΠΑ} = (1.000.000/1.594.000) \Rightarrow \text{ΣΠΑ} = 0{,}6274.$$

Στον πίνακα παρούσας αξίας μιας μελλοντικής πληρωμής, αν κοιτάξουμε κατά μήκος της γραμμής που αντιστοιχεί στην όγδοη περίοδο (εδώ όγδοο έτος), βρίσκουμε την τιμή 0,6274. Η τιμή αυτή βρίσκεται στη στήλη που αντιστοιχεί σε επιτόκιο 6%. Άρα, η τράπεζα δανείζει τον επενδυτή με ετήσιο επιτόκιο 6%.

(β) περίπτωση: πίνακας τελικής αξίας. Δίνεται ότι η τελική αξία είναι TV_8= 1.594.000 και ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι X_0=1.000.000. Από τον τύπο που μας δίνει την τελική αξία ενός αρχικού κεφαλαίου έχουμε ότι:

$$TV_8 = X_0 \times (\text{Συντελεστής Τελικής Αξίας}) \Rightarrow$$
$$1.594.000 = 1.000.000 \times (\text{ΣΤΑ}) \Rightarrow$$
$$\text{ΣΤΑ} = (1.594.000/1.000.000) \Rightarrow \text{ΣΤΑ} = 1{,}5940.$$

Στον πίνακα τελικής αξίας ενός αρχικού κεφαλαίου, αν κοιτάξουμε κατά μήκος της γραμμής που αντιστοιχεί στην όγδοη περίοδο (εδώ όγδοο έτος), βρίσκουμε την τιμή 1,5940. Η τιμή αυτή βρίσκεται στη στήλη που αντιστοιχεί σε επιτόκιο 6%. Άρα, η τράπεζα δανείζει τον επενδυτή με ετήσιο επιτόκιο 6%. Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και εάν επιλύσουμε ως προς το επιτόκιο, τους τύπους που μας δίνουν την παρούσα αξία μιας μελλοντικής πληρωμής ή την τελική αξία ενός αρχικού κεφαλαίου.

Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και με την χρήση του Ms Excel. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση RATE του Ms Excel βρίσκουμε ότι το επιτόκιο είναι 6% (σημ. στην συνάρτηση θέτουμε μηδενικές πληρωμές).